Вестник Донского государственного технического университета. 2019. Т. 19, № 2. С. 179-184. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006
Vestnik of Don State Technical University. 2019. Vol. 19, no. 2, pp. 179-184. ISSN 1992-5980 eISSN 1992-6006



УДК 004.94 https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-2-179-184

Формирование критериев подобия физических объектов и процессов на основе компьютерной программы NonDimCritFormer 1.0*

И. М. Цибирова[1]**
[1]Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Российская Федерация

Formation of similarity criteria for physical objects and processes based on NonDimCritFormer 1.0 computer program ***

I. M. Tsibirova[1]**
[1]North Ossetian State University after K.L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russian Federation

Введение. Современная наука признает актуальной проблему адекватного моделирования физических процессов и объектов. Автоматизация работ в этой сфере повышает точность моделирования и экономит средства на натурном моделировании объектов изучения. Целью данного исследования было создание компьютерной программы, которая по исходному набору параметров автоматически формирует безразмерные критерии подобия.
Материалы и методы. В основе расчетного алгоритма лежит π-теорема теории подобия и основные положения теории размерностей.
Результаты исследования. Создана компьютерная программа, которая позволяет получить все теоретически возможные критерии подобия для моделирования изучаемого физического процесса или объекта.
Обсуждение и заключение. Полученные результаты могут быть использованы в промышленном и научном моделировании физических объектов исследования, расчете новых критериев подобия, решении задач описания сложных процессов и т. д.

Ключевые слова: критерий подобия, теория подобия, теория размерностей, π-теорема, безразмерный комплекс, теорема Кирпичева — Гухмана.

Образец для цитирования: Цибирова, И. М. Формирование критериев подобия физических объектов и процессов на основе компьютерной программы NonDimCritFormer 1.0 / И. М. Цибирова // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 179−184. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-2-179-184

Introduction. The problem of adequate modeling of physical processes and objects is an urgent task of modern science. Automation of work in this area increases the accuracy of modeling and saves money on full-scale modeling of objects under study. The research objective was to create a computer program that would automatically form dimensionless similarity criteria based on the initial set of parameters.
Materials and Methods. The calculation algorithm is based on π-theorem of similarity theory and the basic provisions of the dimensional theory.
Research Results. The computer program is developed. It enables to get all the theoretically possible similarity criteria for the simulation of the physical process or object of interest.
Discussion and Conclusions. The results obtained can be used in the industrial and scientific modeling of physical objects of research, calculation of new similarity criteria, solving problems of describing complex processes, etc.

Keywords: similarity criterion, theory of similarity, dimensional theory, π-theorem, dimensionless complex, Kirpichev-Gukhman theorem.

For citation: I.M. Tsibirova. Formation of similarity criteria for physical objects and processes based on NonDimCrit-Former 1.0 computer program. Vestnik of DSTU, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 179−184. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-2-179-184

Введение. Критерии подобия — это зависимости между безразмерными комбинациями параметров, описывающих объект или физический процесс. На основе таких критериев можно создавать математические модели изучаемых объектов [1–4]. Критерии подобия позволяют доказать соответствие модели и объекта изучения. Они незаменимы, если не сформировано математическое описание процессов по данным экспериментов



* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
** E-mail: 571334@mail.ru
*** The research is done within the frame of the independent R&D.

или наблюдений. Фактически критерии подобия являются безразмерными степенными комплексами наборов физических параметров, описывающих объекты и процессы. По форме они идентичны и численно равны для подобных объектов или процессов.

Материалы и методы. Алгоритм формирования критериев подобия основан на второй теореме теории подобия, так называемой π-теореме. В [5] она сформулирована так: «Всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено функциональной зависимостью между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров».

Из этого следует, что, анализируя и комбинируя физические параметры, описывающие объект изучения, можно составить критерии подобия данного объекта или физического процесса [5, 6].

При моделировании объектов исследования на основе теории подобия наиболее часто используется анализ размерностей физических параметров, описывающих объект в его наиболее важных точках [6, 7].

Исследователи выбирают определяющие физические параметры, описывающие объект изучения (в частности, давление, вязкость, плотность, скорость, температуру, сопротивление, силу тока) и, работая с их размерностями, получают теоретически возможное количество критериев подобия [8]. Эти критерии далее можно положить в основу математического или натурного моделирования

Если у исходного объекта изучения и модели критерии подобия в критически важных зонах численно равны, то они физически подобны [6], согласно третьей теореме подобия (теорема Кирпичева — Гухмана) [9]. Следовательно, для создания, например, модели движения потока по контуру труб необходимо найти внешний вид и численное значение критериев подобия, описывающих реальный объект, а затем построить модель или лабораторную установку так, чтобы в ней значения критериев подобия были численно равны значениям этих же критериев на реальном объекте исследования.

Результаты исследования. Программа NonDimCritFormer 1.0 позволяет исследовать физические объекты и процессы. При этом можно выбрать существенные физические величины (рис. 1), которые определяют базовые параметры объекта изучения, и автоматически рассчитать все теоретически возможные критерии подобия и безразмерные комплексы (рис. 2), сформированные на их основе.

Рис. 1. Выбор исходных физических параметров объекта исследования

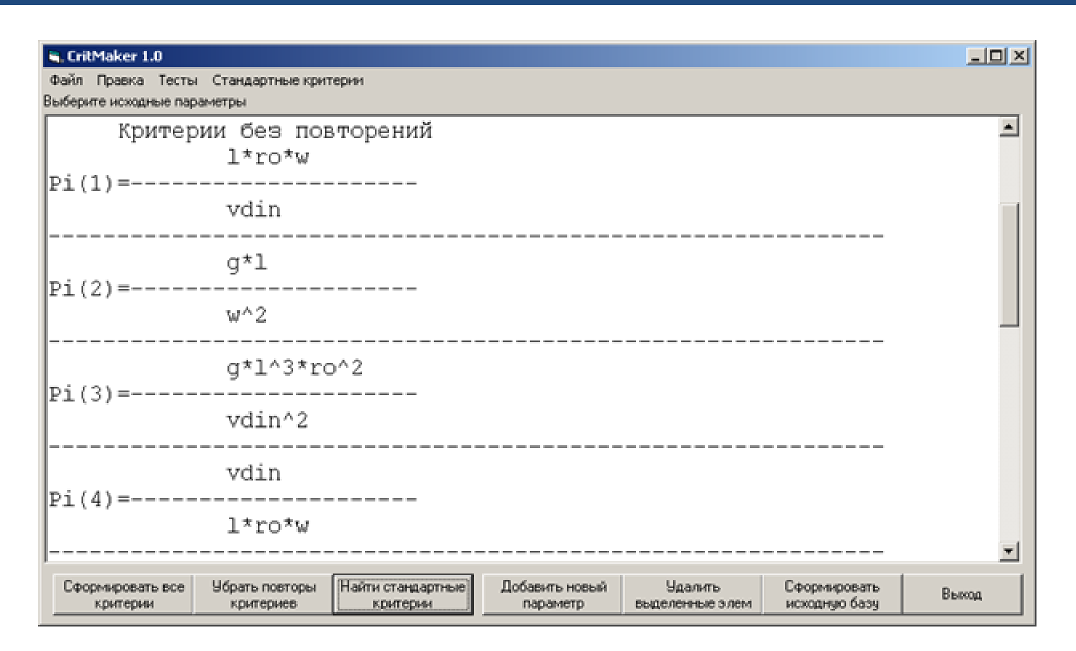


Рис. 2. Рассчитанные критерии подобия

Описание алгоритма программы. Представленный в программе алгоритм формирования критериев подобия базируется на размерностях выбранных физических параметров. Он реализуется в пять шагов.

Шаг 1. Определение физических параметров, которые в значительной степени влияют на физические свойства объекта изучения. От правильности выбора параметров, отсечения несущественных зависит точность результатов. Большое количество выбранных параметров увеличивает число получаемых безразмерных комплексов, но не повышает точность сформированной на их основе модели.

Шаг 2. Составление матрицы размерностей для выбранных физических величин. В ней по строкам расположены размерности отобранных параметров в соответствующих степенях. Размерность матрицы соответствует количеству параметров и их единиц измерения, т. е. в матрице строк столько же, сколько и выбранных параметров, а столбцов столько же, сколько единиц измерения. Например, строка, соответствующая физическому параметру «сопротивление электрическое, R», который имеет размерность четыре единицы $\frac{м^2 кг}{с^3 A^2}$, в матрице размерностей будет иметь вид |2 1 –3 –2|.

Шаг 3. Определение количества независимых параметров. Количество независимых параметров k соответствует рангу матрицы размерностей, т. е. наибольшему порядку неравного нулю определителя, который составлен на базе строк исследуемой матрицы.

Шаг 4. Формирование групп независимых параметров. На этом шаге формируются сочетания по k штук из m параметров, которые составляют безразмерный комплекс. То есть единицы измерения, которые входят в размерность выбранных параметров, взаимно сокращаются, в результате данное сочетание выбранных физических параметров не имеет размерности. Говоря в общем, комплекс образуют такие параметры, частичная матрица размерностей которых имеет как минимум один определитель k-го порядка, не равный нулю.

В соответствии с комбинаторной формулой размещений теоретически возможное количество таких комплексов [1]:

$$C_m^k = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!},$$

где m — общее число параметров, k — ранг полной матрицы размерностей.

Далеко не все полученные комплексы выбранных параметров составляют комплекс с матрицей k-го порядка, поэтому весьма часто количество групп после проверки бывает меньше C_m^k.

Шаг 5. Определение выражений для критериев подобия на основе вычисленных групп независимых параметров. Выражения формируются по следующему алгоритму.

1. Берем очередную группу параметров. Например, набор № 1 — $P_1 \ldots P_k$.

2. Рассчитываем критерии подобия путем деления параметров очередной группы на параметры текущей. В частности, для набора № 1 могут быть составлены следующие критерии:

$$\pi_1 = \frac{P_{k+1}}{P_1^{x_{1.1}} \cdot ... \cdot P_k^{x_{1.k}}}, \; ... \; \pi_{m-k} = \frac{P_m}{P_1^{x_{m-k.1}} \cdot ... \cdot P_k^{x_{m-k.k}}}.$$

Простое деление параметра на набор не приводит к получению безразмерного выражения. Для этого нужно вычислить значения показателей степеней $x_{i.1}...x_{i.k}$ для каждого критериального выражения.

3. Размерности параметров в числителях и знаменателях критериальных комплексов должны быть равны. Принимая во внимание этот факт, формируем и решаем систему линейных уравнений. Для создания такой системы приравниваем степени при одинаковых единицах измерения в числителях и знаменателях критериев, представляющих собой произведения сочетаний размерностей, выбранных в начале расчета физических параметров. В итоге получаем систему из q уравнений с $k = q$ неизвестными.

Получаем наборы по m–k критериев для каждой группы параметров. Максимальное количество безразмерных комплексов, которое можно рассчитать на основе m параметров, составит:

$$\pi_s = C_m^k \cdot (m-k).$$

Эта величина может быть довольно большой. Например, для $m = 7$ и $k = 3$ $\pi_s = 140$. Однако рассчитанные критерии часто бывают одинаковыми и взаимообратными, поэтому общее количество отобранных критериев оказывается меньше, чем π_s. Доля критериев, не прошедших проверку, зависит от исходного набора физических параметров, отобранных для изучения.

Интерфейс и функциональность программы. Программа NonDimCritFormer 1.0 написана на языке VisualBasic.Net. Она обладает интуитивно понятным Windows-интерфейсом и проста в эксплуатации.

Пользователь выбирает физические параметры, существенные, на его взгляд, для моделируемого объекта или процесса (см. рис. 1). В результате выполнения команд «Сформировать все критерии» и «Убрать повторы критериев» на экран выводятся все критерии подобия (безразмерные комплексы), которые можно составить на основе выбранных физических параметров (см. рис. 2).

Команда «Найти стандартные критерии» позволяет установить наличие в списке известных (имеющих имена) критериев подобия. Кроме того, в NonDimCritFormer 1.0 предусмотрена возможность выводить на печать весь список полученных критериев или его часть, сохранять список в виде отдельного файла, редактировать базу стандартных критериев.

Примеры использования программы

***Расчетный пример* 1.** В условиях постоянного напряжения найдем критерии подобия, описывающие прохождение тока в резисторе, дросселе и конденсаторе, подключенных последовательно [8].

Шаг 1. Выбираем физические параметры, существенные для моделируемого объекта. К ним можно отнести: силу тока, I, A; индуктивность, L, $\frac{\text{кг} \cdot м^2}{с^2 \cdot A^2}$; емкость, C, $\frac{\text{с}^4 \cdot A^2}{кг \cdot м^2}$; сопротивление, R; $\frac{\text{кг} \cdot м^2}{с^3 \cdot A^2}$; напряжение U, $\frac{\text{кг} \cdot м^2}{с^3 \cdot A}$ и время t, с. Всего параметров $m = 6$, а базовых единиц измерения $q = 4$.

Шаг 2. Матрица размерностей указанных параметров имеет вид:

	м	кг	с	A
t	0	0	1	0
C	–2	–1	4	2
L	2	1	–2	–2
U	2	1	–3	–1
I	0	0	0	1
R	2	1	–3	–2

Шаг 3. Ранг этой матрицы $k = 3$. Из этого следует, что число независимых параметров в группе будет равно трем, число критериев для каждой независимой группы $m - k = 3$.

Шаг 4. Общее количество групп независимых параметров может составить $C_m^k = C_6^3 = 20$. Комбинации параметров составляются автоматически описываемой программой. Алгоритм проверяет ранг частичной матрицы для каждой составленной комбинации.

Например, для сочетания ILU частичная матрица будет выглядеть так:

$$ILU = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ранг данной матрицы равен 3, следовательно, эта комбинация образует группу независимых параметров. Не все из возможных 20 сочетаний являются безразмерными критериями подобия. Например, не является таким критерием сочетание tCL, потому что ранг матрицы не равен k. В контексте рассматриваемого исходного набора физических параметров только 15 можно считать критериями подобия.

Шаг 5. Составление критериев подобия проходит через решение систем линейных уравнений, которые формируются на основе критериальных комплексов. Например, для сочетания ILU

$$\pi_1 = \frac{t^{x_{1.1}}}{I^{x_{1.2}} \cdot L^{x_{1.3}} \cdot U^{x_{1.4}}}, \quad \pi_2 = \frac{C^{x_{2.1}}}{I^{x_{2.2}} \cdot L^{x_{2.3}} \cdot U^{x_{2.4}}}, \quad \pi_3 = \frac{R^{x_{3.1}}}{I^{x_{3.2}} \cdot L^{x_{3.3}} \cdot U^{x_{3.4}}}$$

будут найдены значения степеней размерностей x и получены следующие критерии:

$$\pi_1 = \frac{t}{I \cdot L \cdot U^{-1}}, \quad \pi_2 = \frac{C}{I^2 \cdot L \cdot U^{-2}}, \quad \pi_3 = \frac{R}{I^{-1} \cdot L^0 \cdot U}.$$

Для каждой из 15 возможных комбинаций исходных физических параметров будут получены по 3 критерия. Среди этих 45 критериев зачастую бывают повторяющиеся и взаимообратные. Для рассматриваемого примера NonDimCritFormer 1.0 выдает 11 уникальных критериев:

$$\pi_1 = \frac{t}{C^{0,5} \cdot L^{0,5}}; \quad \pi_2 = \frac{I \cdot L^{0,5}}{C^{0,5} \cdot U}; \quad \pi_3 = \frac{C^{0,5} \cdot R}{L^{0,5}};$$

$$\pi_4 = \frac{C \cdot L}{t^2}; \quad \pi_5 = \frac{I \cdot t}{C \cdot U}; \quad \pi_6 = \frac{C \cdot R}{t};$$

$$\pi_7 = \frac{C \cdot U^2}{I^2 \cdot L}; \quad \pi_8 = \frac{R \cdot I}{U}; \quad \pi_9 = \frac{L}{C \cdot R^2};$$

$$\pi_{10} = \frac{U \cdot t}{I \cdot L}; \quad \pi_{11} = \frac{R \cdot t}{L}.$$

***Расчетный пример* 2.** Рассмотрим процесс движения жидкости в горизонтальной трубе. Для этого сформируем критерии подобия, которые описывают падение давления в этом процессе [10].

Наиболее важными параметрами, которые описывают падение давления в трубе при прохождении по ней жидкости, можно назвать следующие:

$$\Delta p = f(\omega, \rho, \mu, L),$$

где Δp — давление, $\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$; ω — скорость потока жидкости, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$; ρ — плотность жидкости, $\frac{кг}{м^3}$; μ — коэффициент динамической вязкости, $\frac{кг}{м \cdot с}$, L — длина трубы, м.

Всего параметров $m = 5$, а базовых единиц измерения $q = 3$. Полная матрица размерностей выбранных параметров имеет вид:

	м	кг	с
μ	–1	1	–1
Δ*p*	–1	1	–2
L	1	0	0
ρ	–3	1	0
ω	1	0	–1

Ранг приведенной матрицы $k = 3$. Число независимых параметров в группе — три и количество критериев для каждой независимой группы $m - k = 2$. Всего может быть $C_m^k = C_5^2 = 10$ групп.

Согласно расчетам программы, в данном примере из десяти возможных сочетаний независимыми группами являются только девять. Из этого следует, что всего можно получить 18 безразмерных комплексов. После удаления повторяющихся и взаимообратных программа выдает 6 уникальных сочетаний.

$$\pi_1 = \frac{L \cdot \Delta p}{\mu \cdot \omega}; \quad \pi_2 = \frac{\Delta p}{\rho \cdot \omega^2}; \quad \pi_3 = \frac{L \cdot \Delta p^{0,5} \cdot \rho^{0,5}}{\mu};$$
$$\pi_4 = \frac{\rho^{0,5} \cdot \omega}{\Delta p^{0,5}}; \quad \pi_5 = \frac{L \cdot \rho \cdot \omega}{\mu}; \quad \pi_6 = \frac{L^2 \cdot \Delta p \cdot \rho}{\mu^2}.$$

Важно отметить, что комплексы π_2 и π_5 являются выражениями критериев Эйлера и Рейнольдса соответственно [3].

Обсуждение и заключение. Предложена компьютерная программа NonDimCritFormer 1.0. С ее помощью можно сформировать безразмерные комплексы — критерии подобия, описывающие объект изучения. Для этого предварительно выбираются физические параметры, которые определяют указанный объект в характерных пространственных и временных точках. Автоматизация научных изысканий с помощью предложенного решения повышает точность моделирования и экономит средства на натурном моделировании объектов изучения.

Библиографический список

1. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике / В. С. Зарубин. — Москва : Высшая школа, 2015. — 474 с.
2. Батунер, Л. М. Математические методы в химической технике / Л. М. Батунер, М. Е. Позин. — Ленинград : Химия, 1972. — 724 с.
3. Buchanan, M. Dimensional analysis / M. Buchanan // Nature Physics. — 2010. —Vol. 6. — P. 555.
4. Zohuri B. Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientists. — Cham ; Heidelberg ; New York ; Dordrecht ; London : Springer, 2015. — 372 p.
5. Веников, В. А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики) / В. А. Веников, Г. В. Веников. — Москва : Высшая школа, 1987. — 454 с.
6. Гухман, А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. Процессы переноса в движущейся среде / А. А. Гухман. — Москва : URSS, 2018. — 328 с.
7. Zohuri, B. Dimensional Analysis Beyond the Pi Theorem / B. Zohuri. — Cham : Springer, 2015. — 372 p.
8. Frishter, L. U. Application of the Method of the Theory Similarity and Dimensional Analysis for Research the Local Stress-strain State in the Neighborhood of an Irregular Point of the Boundary / L. U. Frishter // Procedia Engineering. — 2016. — Vol. 153. — P. 151–156.
9. Bluman, G. W. Similarity Methods for Differential Equations / G. W. Bluman, J. D. Cole. — New York ; Heidelberg ; Berlin : Springer-Verlag, 1974. — 333 p.
10. Ayala, L. F. The Similarity Theory Applied to the Analysis of Multiphase Flow in Gas-Condensate Reservoirs / L. F. Ayala, J. P. Kouassi // Energy Fuels. — 2017. — № 21 (3). — P 1592–1600.

Сдана в редакцию 20.12.2018
Принята к публикации 04.03.2019

Об авторе:

Цибирова Ильвира Мухарбековна,
старший преподаватель кафедры «Физика и астрономия» Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова (РФ, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44),
кандидат педагогических наук.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1744-6266
571334@mail.ru